

# リスクとリターンが語る円、正方形、直角三角形と標準正規分布の対称的な幾何学的特性

謝辞：ご助言、ご支援、ご協力を賜った多くの日本オペレーションズ・リサーチ学会員の皆様、日本証券アナリスト協会関西地区交流会の皆様、大阪大学と大阪工業大学の教職員の皆様に厚く御礼を述べます。

勝者、敗者、胴元の均衡点:

$$\phi(\lambda) = 2\lambda\Phi(-\lambda)$$

$$\lambda = 0.612003$$

標準正規分布に二階線形微分方程式とベルヌーイ型微分方程式を用いた。古代エジプトの絵画図の技法のように奥行きを取り除いて回転させて重ね合わせてみると、ピタゴラスの定理とパラメトリック方程式による円、正方形、直角三角形の美しい幾何学模様が描ける。

緑色は  
標準正規分布  
による二階線形  
微分方程式  
に関連する曲線  
赤色は  
標準正規分布  
(逆ミルズ比)  
によるベルヌーイ  
型微分方程式  
に関連する曲  
線

Self-adjoint differential equation:  $\phi(u) \cdot h_p(u) + u \cdot h_v(u) - h_u(u) = 0$

$(\phi(u))^2 \cdot h_p(u) - (\phi(u))^2 \cdot h_v(u) = 0$

Variable coefficient second order linear homogeneous standard differential equation for a standard normal distribution:  $\frac{d^2 h_p(u)}{du^2} + \frac{dh_p(u)}{du} + \frac{1}{u} h_p(u) = 0$

$h_p(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad h_p'(0) = -\frac{\phi(0)}{2}$

Probability density function of a truncated normal distribution:  $\psi(u) = \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda)}$

$\lambda = 0.612003$

Equilibrium point between a banker winners and losers:  $\phi(\lambda) = 2\lambda\Phi(-\lambda)$

$\lambda = 0.612003$

Intercept form of a linear equation for winners:  $\frac{1}{\lambda} u + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Phi(-\lambda)$

Intercept form of a linear equation for losers:  $\frac{1}{\lambda} u + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Phi(-\lambda)$

Intercept form of a linear equation for a bunker:  $\frac{1}{\lambda} u + \frac{1}{\lambda} = 1$

Utility function for winners:  $U_w(u) = (\phi(u) - 2\lambda\Phi(-\lambda))\sqrt{u}$

Inverse Mills ratio:  $u = \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda)}$

$\Phi(-u) = \int_{-\infty}^u \phi(z) dz \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$

$\Phi(u) = \int_0^u \phi(z) dz \quad g(u) = u \cdot \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda)}$

$y(u) = \max(g(u), u) = u \quad u = \frac{\phi(u)}{C + \Phi(-\lambda)}$

$\Phi(-u) = \int_{-\infty}^0 \phi(z) dz \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$

$\Phi(u) = \int_0^u \phi(z) dz \quad g(u) = u \cdot \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda)}$

$y(u) = \max(g(u), u) = u \quad u = \frac{\phi(u)}{C + \Phi(-\lambda)}$

$u = \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda) + \Phi(-u)}$

If  $u = \lambda$ , then  $g(\lambda) = 2\lambda\Phi(-\lambda)$

$\lambda = 0.612003$

Survival ratio of a standard normal distribution:  $\Phi(u) = \int_u^\infty \phi(z) dz$

Probabilistic density function of a truncated normal distribution:  $\phi(u)$

$f(u) = u \cdot \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda)}$

$2\lambda\Phi(-\lambda) \leq u \leq \lambda$

$\Phi(-u) = \int_{-\infty}^u \phi(z) dz \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$

$\Phi(u) = \int_0^u \phi(z) dz \quad g(u) = u \cdot \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda)}$

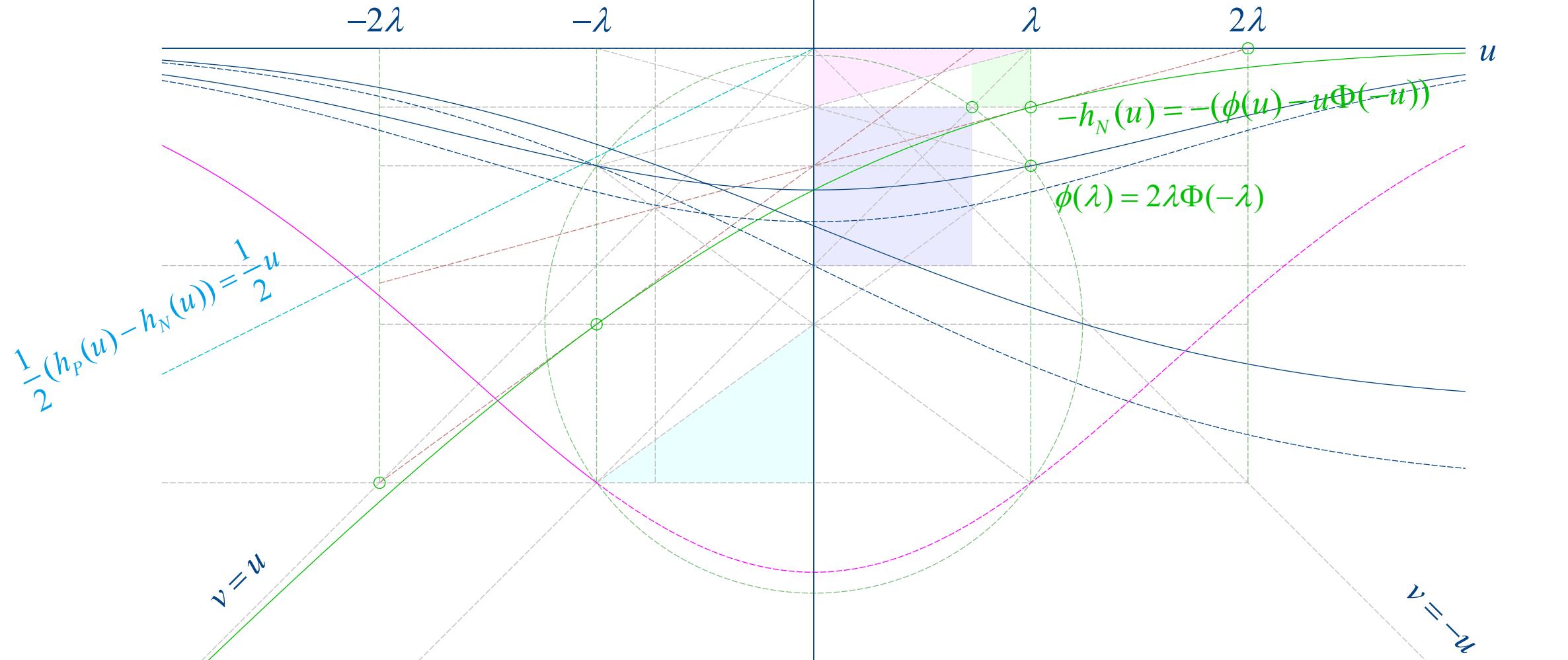
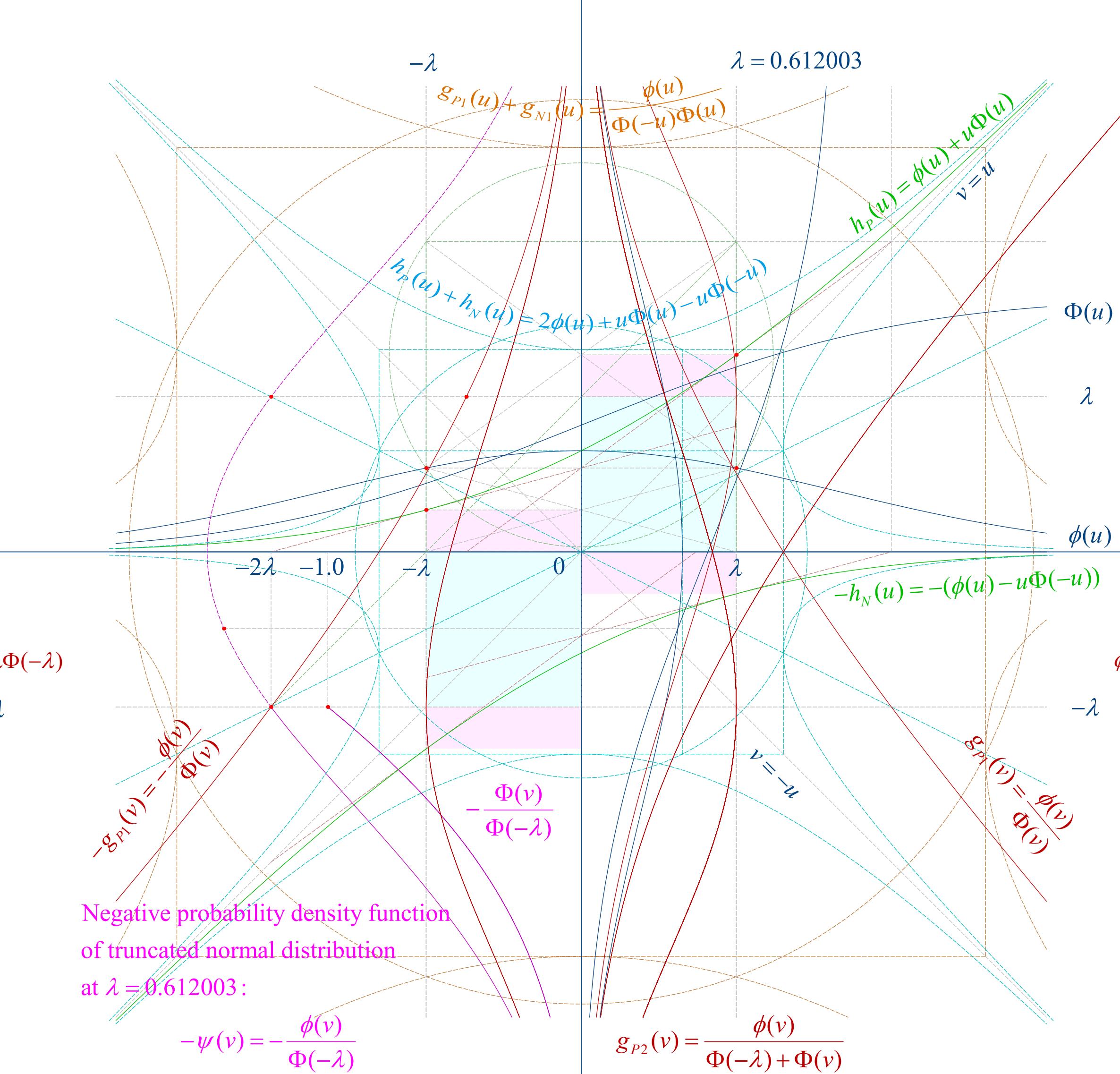
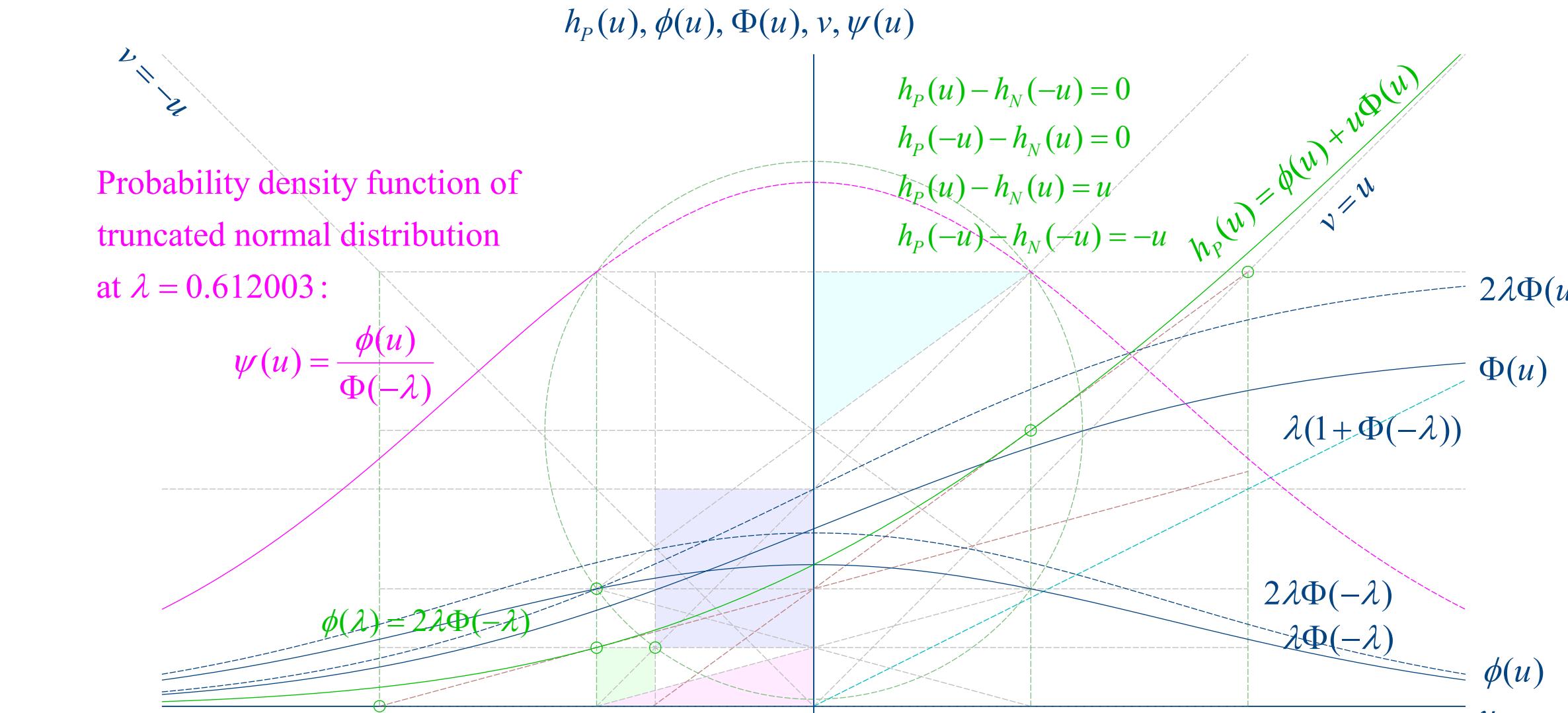
$y(u) = \max(g(u), u) = u \quad u = \frac{\phi(u)}{C + \Phi(-\lambda)}$

$u = \frac{\phi(u)}{\Phi(-\lambda) + \Phi(-u)}$

Bernoulli differential equation for a ratio of a probability density function out of a cumulative distribution function of a standard normal distribution:  $\frac{dg(u)}{du} + ug(u)^2 = 0, \quad g(u) = \frac{\phi(u)}{C + \Phi(-u)}$

$\frac{dg(u)}{du} + ug(u)^2 = 0, \quad g(u) = \frac{\phi(u)}{C + \Phi(-u)}$

or  $\Phi(-u) = \int_{-\infty}^u \phi(z) dz \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$

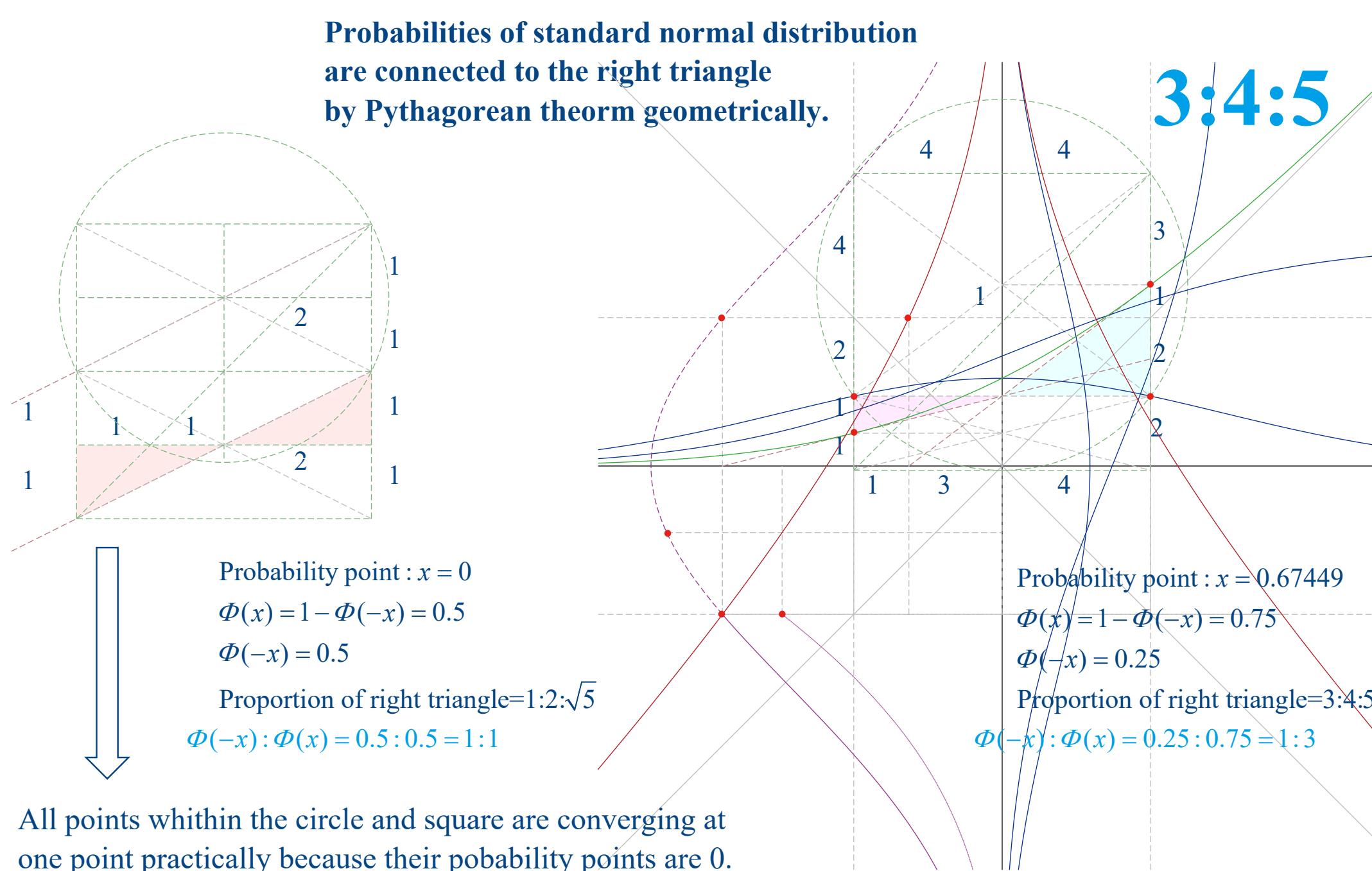


大阪の街から見える生駒山と六甲山の山の高さは  
どことなく縦横比が同じときの標準正規分布の高さに似ている。

同時に、歴史を通じた文化を感じながら曼荼羅のような幾何学模様を描ける。

QRコード  
PowerPoint  
Visual  
Animation

QRコード  
MP4  
Visual  
Animation



共同研究者： 大西 匡光 教授

(大阪大学大学院経済学研究科

& 数理・データ科学教育研究センター)

掲示図の出典： ORSJ, RIMS Kôkyûroku, 2078-10 と修正版, SETA2019, RSS2019 と URL: http://www.oit.ac.jp/center/~nakanihi/ © Shingo Nakanihi and Masamitsu Ohnishi, 2019, JAPAN.

直角三角形による接線の傾きは、累積分布関数の確率で、標準正規分布と逆ミルズ比の切片系の方程式である。

勝者の切片系の方程式：

$$-\frac{1}{\phi(k)} + \frac{1}{\phi(-k)} = 1$$

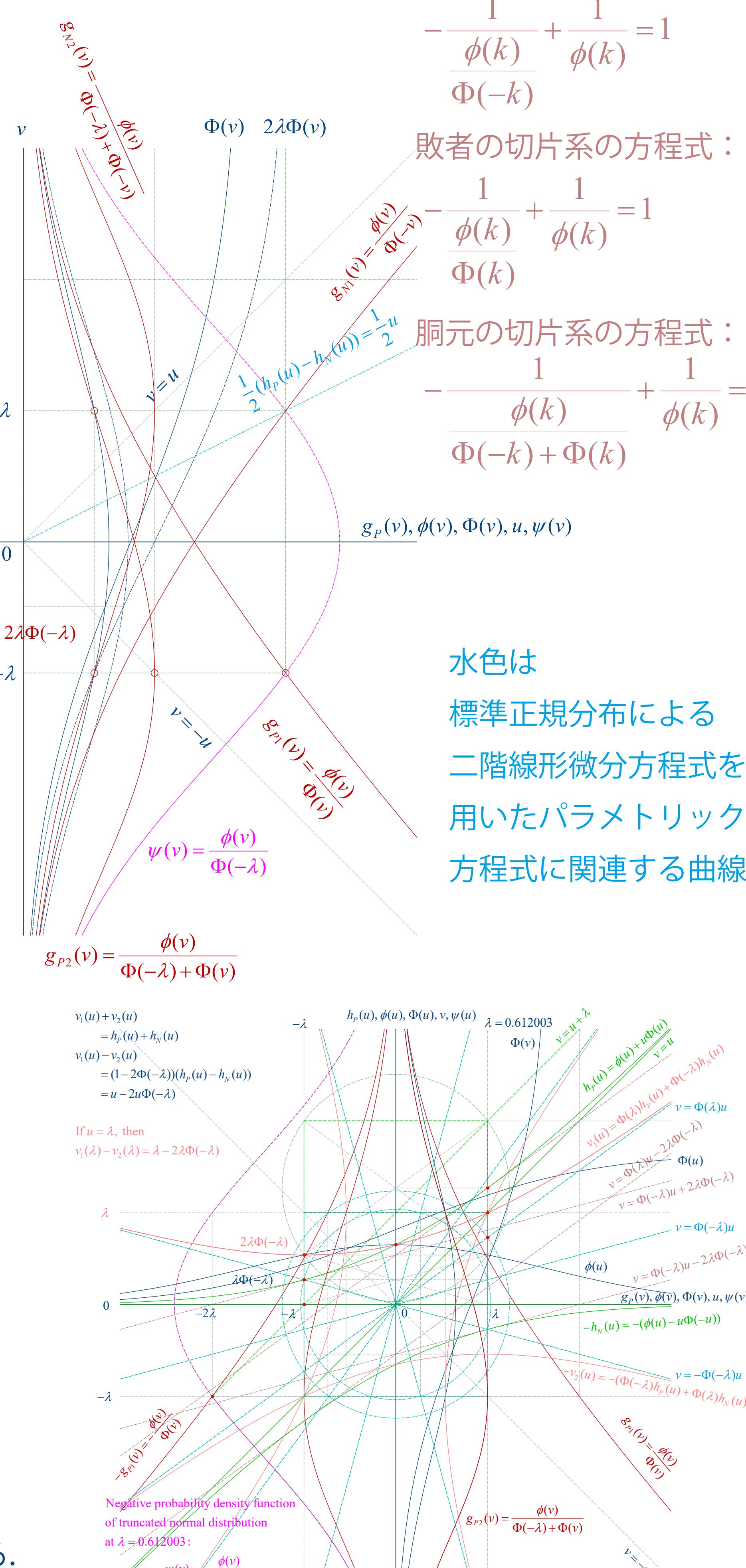
敗者の切片系の方程式：

$$\frac{1}{\phi(k)} - \frac{1}{\phi(-k)} = 1$$

胴元の切片系の方程式：

$$-\frac{1}{\phi(k)} + \frac{1}{\phi(-k)} = 1$$

水色は  
標準正規分布による  
二階線形微分方程式を  
用いたパラメトリック  
方程式に関連する曲線



From 大阪工業大学大宮キャンパス  
南東側：生駒山  
北西側：六甲山

